**«Математическое моделирование. Свойства функций»**

Математические формулы – это удобный язык для изложения идей и методов математики. Сами же эти идеи и методы можно описать, используя привычные и наглядные образы из окружающей среды.

Следуя этому принципу, основные свойства функции можно изложить в доступной и увлекательной форме, например, используя пословицы.

**«Дальше кумы – меньше греха».**

Функция, которая показывает, как изменяется мера греха по мере удаления от кумы, монотонно убывающая.

**«Чем дальше в лес – тем больше дров».**

Какие две точки на оси абсцисс ни взять, для более дальней (чем дальше в лес…) значение функции будет больше (…тем больше дров). Такое свойство функции называется монотонным возрастанием.

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| Продвижение в лес |

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| Количество дров |

Мера греха

Расстояние до кумы

Сходное свойство иллюстрирует и пословица **«Каши маслом не испортишь»**.

Качество каши можно рассматривать как функцию количества масла в ней. Согласно пословице эта функция не уменьшится с добавкой масла. Она, возможно, увеличится, но может оставаться и на прежнем уровне. Подобного рода функции называются монотонно неубывающими.

Чувствуете разницу между дровами и кашей? Между монотонным возрастанием и монотонным неубыванием?

Возрастание – это только вверх. Неубывание – это либо вверх, либо ни вверх, ни вниз. Возрастание – частный случай неубывания. Например, всюду постоянная функция (константа) принадлежит к числу неубывающих, хотя она ни на одном участке своей области определения не возрастает.

**«Пересев хуже недосева»**, - издавна говорили земледельцы. Вековой опыт свидетельствовал: урожай лишь до некоторой поры растет вместе с плотностью посева, дальше он снижается, потому что при чрезмерной густоте ростки начинают глушить друг друга.

Качество каши

Урожайность

Количество масла Плотность посева

Эта закономерность станет особенно наглядной, если изобразить ее графиком, где урожай представлен как функция плотности посева. Урожай максимален, когда поле засеяно в меру. Максимум – это наибольшее значение функции по сравнению с ее значением во всех соседних точках. Это как бы вершина горы, с которой все дороги ведут только вниз, куда ни шагни.

В примере с урожаем дело обстоит точно так же, как в ситуации, которую описывает пословица **«Недосол на столе – пересол на спине»**. Качество пищи зависит, является функцией от количества соли в ней. Мало соли – невкусно, много – тоже в рот не возьмешь. А где-то в промежутке, в золотой середине, когда соли в самый раз, кушанье становится особенно лакомым. В этой точке кулинарная функция достигает максимума. Малейшей щепотью, соли больше или меньше и – дегустатор с утонченным вкусом скажет, что качество пищи снизилось.

Есть у максимума антипод – минимум. Минимум – это как бы дно впадины, из которой , куда ни шагни, все дороги ведут только вверх.

Правда, если шагать все дальше, возрастание где-то может смениться и спадом. Про минимум говорят тогда, что он локальный. Звание абсолютного минимум получает, если это наименьшее значение функции для своей области определения. Если на всей области определения локальных минимумов несколько, то абсолютный придется поискать. Может оказаться, что функция принимает наименьшее значение в граничной точке области определения. Все сказанное можно перефразировать по отношению к наибольшему значению, абсолютному и локальным максимумам.

В семье элементарных функций, большинство составляют функции, либо возрастающие, либо убывающие. Такое преобладание отнюдь не характерно для всего огромного мира функциональных зависимостей. На практике гораздо чаще встречаются функции, которые наделены обоими качествами: местами они стыкуются в точках максимумов и минимумов. Подобное можно увидеть у параболы и синусоиды. Проследим эти графики слева направо, от меньших аргументов к большим: в точке минимума спад сменяется ростом, в точке максимума – наоборот. Общая стыкующая роль максимумов и минимумов подчеркивается их обобщающим названием «экстремум». Как под словом «ребенок» подразумевается либо мальчик, либо девочка, так понятие «экстремум» распадается на «максимум» и «минимум.

Смотри приложение, рис. 1.

**«Не круто начинай, круто заканчивай».** Повелительное звучание пословицы явно рассчитано на борьбу с противоположной, весьма распространенной манерой работы. Для нее тоже есть своя пословица: **«Горяч на почине, да скоро остыл»**.

Обе функции, представленные на графиках, зависят от времени и возрастают. Но, как свидетельствуют кривые, расти можно по-разному.

Работа

Работа

Время Время

Наклон одной кривой постоянно увеличивается. Рост функции усиливается с ростом аргумента. Такое свойство функции называется вогнутостью.

Наклон другой кривой неизменно уменьшается. Рост функции слабеет с ростом аргумента. Такое свойство функции называется выпуклостью.

Чтобы лучше уяснить различие между выпуклостью и вогнутостью, сравним график роста человека с графиком роста населения Земли. Здесь опять и та и другая функции возрастающие. Но рост человека со временем замедляется: достигнув зрелого возраста, человек уже не растет. Население земного шара, напротив, с течением времени растет все быстрее. В первом случае – это выпуклость, а во втором – это вогнутость.

Психологи советуют: если вам нужно запомнить большой объем информации, вообразите себя прогуливающимся по хорошо знакомой улице и мысленно привязывайте отдельные куски текста к подъездам домов, магазинам, остановкам и т.д. Когда потребуется воспроизвести заложенное в память, нужно вновь мысленно отправиться на прогулку по той же улице и считывать фразу за фразой с подъездов, заборов, киосков…

Чтобы надежнее уложить в памяти эту информацию, давайте воспользуемся советом психологов.

Отправимся в путь на автомобиле по шоссе из пункта А в пункт Б. Будем внимательно приглядываться к рельефу дороги, связывая с его особенностями математические термины.

Смотри приложение, рис. 2.

Мысленно представим высоту в каждой точке пути над некоторым воображаемым горизонтальным уровнем как функцию расстояния, пройденного вдоль этой горизонтали. Промежуток от А до В – область определения функции.

Ровный участок дороги, естественно, ассоциируется с термином «константа».

Дорога идет под уклон – это монотонное убывание. Кончился спуск – и водитель включает газ, отмечает тем самым точку минимума. Дорожный знак указывает подъем, а у математика наготове свой термин – монотонное возрастание.

Перевалили за гребень холма – пройдена точка максимума. И снова началось монотонное убывание, то есть спуск. На холмах дорога выпукла, в ложбинах вогнута. Не отмеченные дорожными знаками стыки таких участков математик отметит про себя как точки перегиба.

Математические категории, о которых шла речь в этом описании, естественным образом делятся на две группы. Одни описывают поведение функции в окрестности некоторых характерных точек (максимум, минимум, перегиб), другие – в некоторых промежутках (выпуклость, вогнутость, убывание, возрастание).

Чтобы в общих чертах воспроизвести профиль дороги, на графике достаточно наметить его сначала в окрестностях характерных точек, а затем, воспроизвести его поведение в промежутках.

По таким правилам можно восстановить облик любой функции. Так удобнее рисовать даже те функции, которые выражены формулами – как говорят, заданны аналитически.

**Приложение:**

|  |
| --- |
|  |

|  |
| --- |
| Наибольшее значение на отрезке (α,b)  **Рис. 1**  **Рис. 2** |

|  |
| --- |
| Локальные максимумы |

|  |
| --- |
| α |

|  |
| --- |
| b |

|  |
| --- |
| Локальные  минимумы |

|  |
| --- |
| Наименьшее значение  Абсолютной высоты |

|  |
| --- |
| B |

|  |  |
| --- | --- |
| Выпукла | |
| Перегиб | |

|  |
| --- |
| Вогнута |
| Перегиб |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выпукла | | Вогнута |
| Перегиб Перегиб | | |

|  |
| --- |
| Выпукла |

|  |
| --- |
| Постоянна |

|  |
| --- |
| Убывает |
| Не возрастает |

|  |
| --- |
| Минимум |

|  |
| --- |
| Возрастает |

|  |
| --- |
| Максимум |

|  |
| --- |
| Убывает |

|  |
| --- |
| A |

|  |
| --- |
| Вогнута |
| Перегиб |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выпукла | | Вогнута |
| Перегиб Перегиб | | |

|  |
| --- |
| Выпукла |

|  |
| --- |
| Постоянна |

|  |
| --- |
| Убывает |
| Не возрастает |

|  |
| --- |
| Минимум |

|  |
| --- |
| Возрастает |

|  |
| --- |
| Максимум |

|  |
| --- |
| Убывает |

|  |
| --- |
| A |